

# MÔ HÌNH TOÁN HỌC TỔNG QUÁT HAI CHIỀU NGANG VỀ XÂM NHẬP MẶN Ở VÙNG NƯỚC NGẦM VEN BIỂN

## A GENERAL MATHEMATICAL MODEL OF TWO-DIMENSIONAL HORIZONTAL FLOW OF SEAWATER INTRUSION IN COASTAL AQUIFERS

TRẦN VĂN MINH

UBND Thành phố Đà Nẵng

NGUYỄN THẾ HÙNG

Trường Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng

### TÓM TẮT

Trong bài báo này các tác giả giới thiệu mô hình toán xây dựng được đủ tổng quát hai chiều ngang mô tả xâm nhập mặn vào nước ngầm ở vùng ven biển đúng cho trường hợp dòng nước ngầm có áp cũng như không áp.

Thuật toán và chương trình tính mô hình theo phương pháp phần tử hữu hạn dạng yếu Galerkin được thiết lập để dự báo vị trí, hình dạng mặt phân cách giữa nước nhạt và nước mặn trong các điều kiện khai thác nguồn nước nhạt khác nhau.

Kết quả tính toán trên được so sánh kiểm chứng với các phương pháp tính toán giải tích trong các trường hợp đơn giản.

### ABSTRACT

In this paper, the authors present a general mathematical model of two dimensional horizontal flow of seawater intrusion into coastal confined and unconfined aquifers. Algorithms and program of this model are formulated by weak Galerkin finite element method for prediction of the transient effect of pumping well on seawater intrusion into coastal confined and unconfined aquifers. The validity of the model is tested by using the analytical solutions.

### 1. Mở đầu

Vùng ven bờ biển, nguồn nước nhạt chảy ra biển, hình thành vùng chuyển tiếp giữa nước nhạt và nước mặn. Trong vùng này mật độ của nước hỗn hợp biến đổi từ nước nhạt đến nước mặn. Tuy nhiên dưới những điều kiện nhất định, chiều rộng của vùng này là nhỏ so với chiều dày của tầng chứa nước; vì vậy vùng chuyển tiếp từ nước nhạt đến nước mặn có thể xem là một mặt phân cách. Khi nhu cầu khai thác nước ngầm tăng lên làm giảm lượng nước nhạt đổ về biển, mặt phân cách sẽ di chuyển vào phía trong đất liền. Hiện tượng này được gọi là sự xâm nhập của nước biển. Tổng quát, hình dạng và vị trí của mặt phân cách này thay đổi theo thời gian và thường xảy ra trong không gian ba chiều. Hình dạng và vị trí mặt phân cách này có thể xác định được đầy đủ bằng mô hình toán ba chiều [3]; tuy nhiên việc giải mô hình toán ba chiều ở đây đến nay vẫn còn rất nhiều khó khăn về mặt toán học. Do đó để nhận được lời giải số có thể đáp ứng được yêu cầu của thực tế sản xuất, người ta thường trung bình hoá phương trình ba chiều để có được phương trình hai chiều đơn giản hơn.

Khi vùng khai thác có hình dạng tùy ý và có bố trí nhiều giếng bơm ở các vị trí khác nhau, người ta cần phải sử dụng phương trình hai chiều ngang (trung bình theo phương đứng) để xác định hình dạng và vị trí mặt phân cách giữa nước nhạt và nước mặn.

Trong bài báo này, các tác giả giới thiệu mô hình toán xây dựng được đủ tổng quát hai chiều ngang mô tả mặt phân cách đúng cho trường hợp dòng nước ngầm có áp cũng như không áp.

Thuật toán và chương trình tính mô hình được thiết lập theo phương pháp phần tử hữu hạn dạng yếu Galerkin để dự báo vị trí, hình dạng mặt phân cách giữa nước nhạt và nước mặn trong các điều kiện khai thác nguồn nước nhạt khác nhau.

## 2. Hệ phương trình cơ bản tổng quát chỉ đạo dòng chảy hai chiều ngang

Hệ phương trình chỉ đạo dòng chảy xâm nhập mặn của nước ngầm vùng ven biển hai chiều ngang không áp [3] như sau:

$$-\nabla \cdot (\alpha T \nabla f) + \nabla \cdot (\alpha T_a \nabla h) = I_f + I_s + q'_f + q'_s \quad (1)$$

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha T_a) \nabla h + \nabla \cdot (\alpha T_a \nabla f) = -I_s - q'_s \quad (2)$$

Trong đó:

$$f = h_f / \alpha; \quad T = K(H_1 + h_f); \quad T_a = T(H_1 - h) / (H_1 + h_f)$$

Hệ phương trình chỉ đạo dòng chảy xâm nhập mặn của nước ngầm vùng ven biển hai chiều ngang có áp [3] được cho như sau:

$$-\nabla \cdot (\alpha T \nabla f) + \nabla \cdot (\alpha T_a \nabla h) = I_f + I_s + q'_f + q'_s \quad (3)$$

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha T_a) \nabla h + \nabla \cdot (\alpha T_a \nabla f) = -I_s - q'_s \quad (4)$$

với:  $f = \phi_f / \alpha$ ;  $T = K(H_1 - H_2)$ ;  $T_a = T(H_1 - h) / (H_1 - H_2)$

ở đây T được gọi là hệ số dẫn truyền của tầng thấm; đối với tầng thấm không đẳng hướng ta có  $T = (T_x, T_y)$

Từ các hệ phương trình (1), (2) và (3), (4) ở trên đã thiết lập riêng lẻ cho dòng chảy xâm nhập mặn hai chiều ngang không áp và có áp; chúng tôi viết lại hệ phương trình này ở dạng tổng quát đúng cho cả dòng chảy không áp lẫn có áp như sau:

$$-\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha T_x \frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha T_y \frac{\partial f}{\partial y}) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha T_{ax} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha T_{ay} \frac{\partial h}{\partial y}) \right] = I_f + I_s + q'_f + q'_s \quad (5)$$

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha T_{ax} \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha T_{ay} \frac{\partial h}{\partial y}) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha T_{ax} \frac{\partial f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha T_{ay} \frac{\partial f}{\partial y}) \right\} = -I_s - q'_s \quad (6)$$

ở đây:

$$f = \frac{(1 - \beta)h_f + \beta\phi_f}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}$$

$$T_x = K_x [H_1 + (1 - \beta)h_f - \beta H_2]; \quad T_y = K_y [H_1 + (1 - \beta)h_f - \beta H_2];$$

$$T_{ax} = T_x \frac{(H_1 - h)}{[H_1 + (1 - \beta)h_f - \beta H_2]}; \quad T_{ay} = T_y \frac{(H_1 - h)}{[H_1 + (1 - \beta)h_f - \beta H_2]}$$

và:

+ Đối với trường hợp không áp  $\beta = 0$

+ Đối với trường hợp có áp  $\beta = 1$

Trong đó:

$\rho_f$ - mật độ của nước nhạt;  $\rho_s$ - mật độ của nước mặn

$S_0$ - độ trữ nước riêng;  $t$ - thời gian quan sát

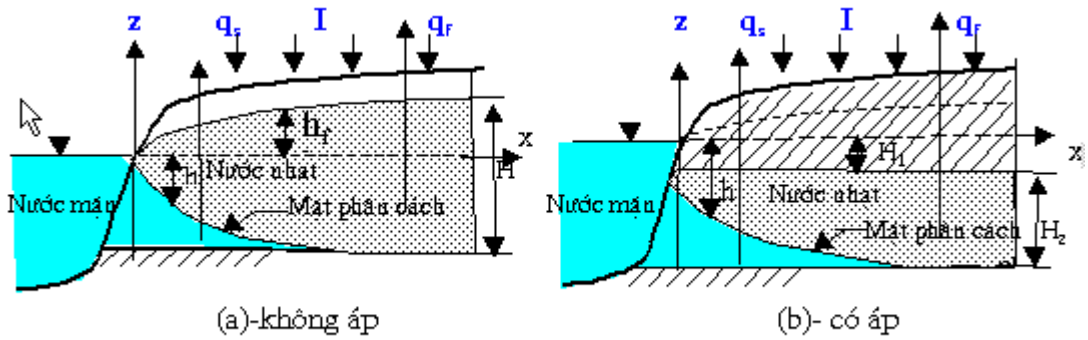
$h_f$ - chiều cao mực nước ngầm so với mực chuẩn

$\phi_f, \phi_s$ - cột nước thủy lực của vùng nước nhạt, nước mặn tương ứng

$I_f, I_s$ - lượng nước cung cấp cho nước nhạt, nước mặn trong tầng thấm nước

$q'_f, q'_s$ - các điểm nguồn hoặc điểm tụ trong vùng nước nhạt và nước mặn

$K_x, K_y$ - hệ số thấm theo phương x, y



Hình 1- Tầng thấm nước với nước ngầm nhạt và mặn

Hệ phương trình vi phân ở trên bao gồm các phương trình (5) và (6) là những phương trình vi phân đạo hàm riêng phi tuyến, việc giải tìm nghiệm chính xác của hệ phương trình rất khó thực hiện.

### 3. Phương pháp giải số

Để giải gần đúng các hệ phương trình trên chúng tôi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin được thiết lập ở dạng chuẩn, với phần tử tam giác và giả sử rằng tại mỗi phần tử các giá trị của hệ số thấm theo các phương x, y là không thay đổi ta có các phương trình thiết lập cho một phần tử như sau:

$$\int_A N_i L(P)_m dA \quad (7)$$

Trong đó:

$N_i^{(e)}$  - trong đó  $i=1,2,3$  là hàm dạng của phần tử tam giác (ở đây chọn bậc nhất)

$L(P)_m$  với  $m=1,2$  là các phương trình vi phân (5) hoặc (6), thiết lập cho mỗi phần tử.

A - diện tích phần tử

Giá trị của h được xấp xỉ theo công thức:

$$h^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} h_i \quad (8)$$

Trong đó:

$h^{(e)}$  - giá trị gần đúng của chiều sâu mặt phân cách tại một điểm trong phần tử

n - số nút của phần tử;  $h_i$  - chiều sâu mặt phân cách tại các nút của phần tử

Sau khi thực hiện các phép biến đổi toán học, ta nhận được hệ phương trình tuyến tính sau:

$$[K_a] \begin{Bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ f_n \end{Bmatrix} - [K_b] \begin{Bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ h_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (I_{r1}^{(e)} + I_{s1}^{(e)}) \frac{A_1}{3} \\ \cdot \\ (I_{rn}^{(e)} + I_{sn}^{(e)}) \frac{A_n}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_{r1} + q_{s1} \\ \cdot \\ q_{rn} + q_{sn} \end{Bmatrix} + \frac{[(1-\beta)h_f - \beta H_2 + h]}{[H_1 + (1-\beta)h_f - \beta H_2]} \begin{Bmatrix} R_1 \\ \cdot \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$- [K_b] \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} + \left[ [K_b] + \frac{[C]}{\Delta t} \right] \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} = - \begin{Bmatrix} \frac{I_{s1}^{(e)} A_1}{3} \\ \vdots \\ \frac{I_{sn}^{(e)} A_n}{3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_{s1} \\ \vdots \\ q_{sn} \end{Bmatrix} + \frac{[C]}{\Delta t} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Với:

$$[K_a] = \sum_{e=1}^m [K_a^{(e)}] ; [K_b] = \sum_{e=1}^m [K_b^{(e)}] ; [C] = \sum_{e=1}^m [C^{(e)}]$$

$$[q_{fi} + q_{si}] = \sum_{e=1}^m [q_{fi}^{(e)} + q_{si}^{(e)}] ; [q_{si}] = \sum_{e=1}^m [q_{si}^{(e)}] ; [R_i] = \sum_{e=1}^m [R_i^{(e)}] \quad (i = 1, n)$$

$$[K_b^{(e)}] = \frac{\alpha T^{(e)}_{ax}}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha T^{(e)}_{ay}}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix}$$

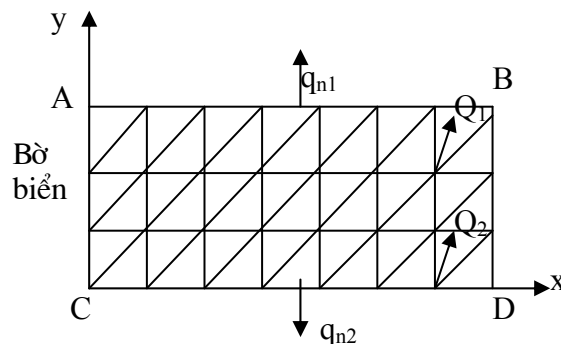
$$[K_a^{(e)}] = \frac{\alpha T_x^{(e)}}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha T_y^{(e)}}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} ; [C^{(e)}] = S_0^{(e)} \frac{A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$S_0^{(e)}$  - độ trữ nước của phần tử tam giác  
 $a_i, b_i, c_i$  - các hệ số của hàm dạng Ni

Sơ đồ tính:

Miền tính toán là một hình chữ nhật nằm ngang, được giới hạn bởi chiều dài (L) thẳng góc với bờ biển, chiều rộng song song và trùng với bờ biển. Kích thước của miền tính toán phụ thuộc vào sơ đồ bố trí giếng bơm và chiều dài mũi nêm mạn ban đầu ( $L_0$ ). Sơ đồ tính được thể hiện như ở Hình 2:



**Hình 2-** Sơ đồ lưới với phần tử tam giác

Điều kiện ban đầu và điều kiện biên:

- Điều kiện ban đầu:

Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$  chiều sâu ( $h$ ) của mặt phân được xác định theo công thức của Ghyben-Herzberg:

$$h = -\frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f} h_f \quad (11)$$

- Điều kiện biên:

- Biên AB:  $q_{n1} = 0$  hoặc bằng một giá trị cho trước.

- Biên CD:  $q_{n2} = 0$  hoặc bằng một giá trị cho trước.

- Biên AC:  $h = 0$  hoặc bằng một giá trị cho trước tại thời điểm ban đầu

- Biên BD:  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Hệ phương trình (9) và (10) được giải theo phương pháp gradient liên hợp; bước một phương trình (9) được giải lập để tìm các giá trị  $f_i$ , sau đó thế các giá trị  $f_i$  vào phương trình (10) và giải hệ phương trình này ta sẽ tìm được các giá trị  $h_i$  tại các nút lưới của miền tính toán.

Quá trình giải được lặp lại cho các bước thời gian tiếp theo, với xử dụng điều kiện ban đầu là các giá trị  $h_i$  đã tính được ở bước thời gian trước.

## 4. Kiểm tra mô hình

### 4.1. Số liệu tính toán

Khu vực tính toán là Hoà Khánh, thành phố Đà Nẵng, khi có ba giếng bơm khai thác hoạt động theo sơ đồ không áp Hình 1(a) với các số liệu sau:

Hệ số thấm  $K = 8.1$  m/ngày; lượng nước ngầm đều  $I = 0$  m/ngày; độ trữ nước riêng  $S_o = 0.6$ ; chiều sâu của tầng không thấm  $H_t = 25$  m; lưu lượng các giếng bơm tại các điểm có tọa độ  $(x, y)$ :  $Q_1(x_1, y_1) = Q_1(1000, 0) = 120 \text{ m}^3/\text{ngày}$ ,  $Q_2(x_2, y_2) = Q_2(1000, 100) = 60 \text{ m}^3/\text{ngày}$ ,  $Q_3(x_3, y_3) = Q_3(1000, -100) = 60 \text{ m}^3/\text{ngày}$ ; biên bên trái ( $x=0$ )  $h = 0$  m; biên trên và dưới  $q_n = 0$ .

Do vùng khảo sát có tính đối xứng qua trục  $ox$ , nên miền tính toán được chọn là một nửa hình chữ nhật nằm ngang có cạnh  $oy$  trùng với bờ biển rộng 400m, chiều dài thẳng góc với bờ biển dài 1100m, miền tính toán được chia thành 44 phần tử hình tứ giác, 60 nút, bước lưới  $(\Delta x, \Delta y) = (100 \text{ m}, 100 \text{ m})$ .

### 4.2. Kết quả tính toán

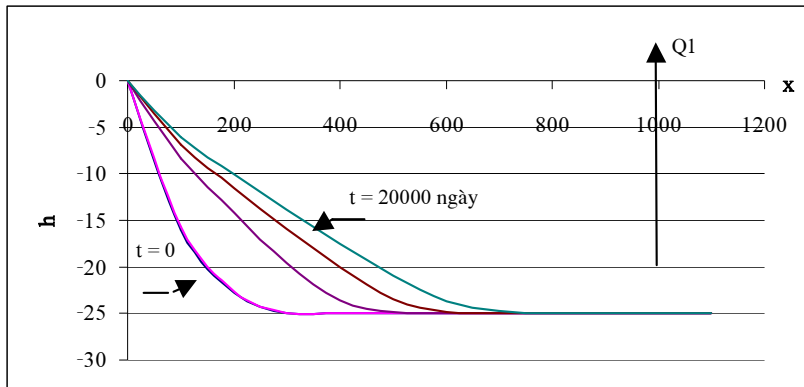
Kết quả tính toán vị trí và hình dạng mặt phân cách theo thời gian trong mặt phẳng thẳng đứng thẳng góc với bờ biển đi ngang qua trục  $ox$  như sau:

Bảng 1- Vị trí và chiều sâu mặt phân cách ( $h$ ) theo thời gian ( $t$ )

X	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
H ban đầu	0	-16.00	-22.80	-25	-25	-25	-25	-25	-25	-25	-25	-25
H(t=8000)	0	-8.91	-14.78	-20.17	-23.95	-24.95	-24.99	-25	-25	-25	-25	-25
H(t=14000)	0	-7.54	-12.36	-16.78	-20.96	-24.1	-24.95	-24.99	-25	-25	-25	-25
H(t=20000)	0	-6.76	-10.96	-14.83	-18.56	-22.05	-24.34	-24.95	-24.99	-25	-25	-25

Trên cơ sở số liệu ở Bảng 1 vị trí và chiều sâu mặt phân cách ( $h$ ) theo thời gian ( $t$ ) được biểu diễn qua đồ thị Hình 3. Qua số liệu trên cho thấy tại thời điểm ban đầu ( $t=0$ ) mũi nêm mặn nằm ở vị trí cách bờ biển 250 m, cách giếng khai thác 750 m, sau một khoảng thời gian

khai thác  $t = 20.000$  ngày  $\approx 54,79$  năm thì mũi nêm mặn sẽ dịch chuyển đến vị trí cách bờ biển khoảng 701,50 m, cách giếng khai thác khoảng 298,50 m.



Hình 3- Vị trí và chiều sâu mặt phân cách (h) theo thời gian (t)

Qua kết quả tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) ở đây so với các công thức thường dùng hiện nay như công thức Theis, công thức Strack ta có kết quả của vị trí nêm mặn theo từng phương pháp được cho ở Bảng 2:

Bảng 2- Kết quả tính toán vị trí nêm mặn theo các phương pháp

X	PTHH	Theis	Strack
Khoảng cách từ bờ biển đến vị trí nêm mặn xa nhất (m)	701,50	701,46	701,60

Với kết quả trên cho thấy sự chênh lệch giữa các phương pháp tính là không đáng kể và lời giải theo phương pháp phần tử hữu hạn thể hiện được hình dạng, vị trí của mặt phân cách theo từng thời điểm tính toán, với cấu tạo địa chất bất kỳ.

## 5. Kết luận

Mô hình toán xâm nhập mặn của nước ngầm ven biển hai chiều thiết lập được ở đây là tổng quát đúng cho dòng chảy có áp lẫn không áp. Thuật toán và chương trình tính có thể tính cho các trường hợp vùng khai thác nước ngầm ven biển có áp, không áp với các giếng bơm bố trí bất kỳ của bài toán xâm nhập mặn ở vùng ven biển rất thuận tiện cho việc xác định vị trí, hình dạng mặt phân cách giữa hai vùng nước nhạt và nước mặn tại các thời điểm, tương ứng với một lưu lượng khai thác nhất định. Điều này rất có ý nghĩa đối với việc qui hoạch, bố trí các giếng bơm, dự báo sự xâm nhập mặn và quản lý việc khai thác nước ngầm ven biển phục vụ cho nhu cầu phát triển Kinh tế - xã hội.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phan Ngọc Cừ, Tôn Sĩ Kính, *Động lực nước dưới đất*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, Hà Nội, 1981.
- [2] Nguyễn Thế Hùng, *Phương pháp phần tử hữu hạn trong chất lỏng*, Tài liệu chuyên khảo, NXB Xây dựng, Hà Nội, 2004.
- [3] Nguyen The Hung, *Mathematical model of sediment transport two dimensional horizontal flow*, Proceedings of International Conference on Engineering Mechanics Today, Vol1, p.541-548, Hanoi, 1995.
- [4] Jacob Bear and Arnold Verruijt, *Modeling Groundwater Flow and Pollution*, D. Reidel Publishing Company, 1979.